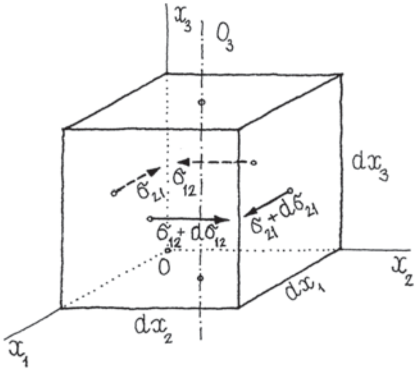
Rozważmy stan równowagi wyciętego z ciała elementarnego sześcianu o ścianach równoległych do płaszczyzn układu odniesienia (rys. 1.4). W celu zwiększenia czytelności rysunku zostały na nim przedstawione tylko te naprężenia, których momenty sił względem osi O_3 są różne od zera.



Rys. 1.4.

Warunki zerowania się momentów sił działających na sześcian względem trzech wzajemnie prostopadłych osi O_1, O_2 i O_3, przechodzących przez jego środek i równoległych do kolejnych osi układu odniesienia, możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned}\sum M_3 &= (2\sigma_{21} + d\sigma_{21})dx_1dx_3 \cdot \tfrac{1}{2}dx_2 - (2\sigma_{12} + d\sigma_{12})dx_2dx_3 \cdot \tfrac{1}{2}dx_1 \\ &= (\sigma_{21} - \sigma_{12} + \tfrac{1}{2}d\sigma_{21} - \tfrac{1}{2}d\sigma_{12})dV = 0 \\ \sum M_2 &= (\sigma_{31} - \sigma_{13} + \tfrac{1}{2}d\sigma_{31} - \tfrac{1}{2}d\sigma_{13})dV = 0 \\ \sum M_1 &= (\sigma_{32} - \sigma_{23} + \tfrac{1}{2}d\sigma_{32} - \tfrac{1}{2}d\sigma_{23})dV = 0\end{aligned} \tag{1.7}$$

gdzie $dV = dx_1dx_2dx_3$.

Pomijając w powyższych zależnościach wielkości nieskończenie małe (różniczki naprężeń), otrzymujemy:

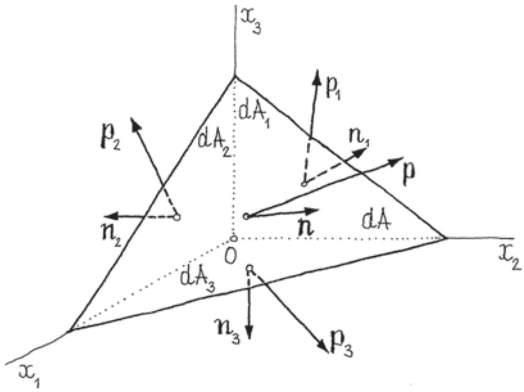
$$\sigma_{21} - \sigma_{12} = 0, \qquad \sigma_{31} - \sigma_{13} = 0, \qquad \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \tag{1.8}$$

Powyższe relacje można zapisać w zwartej postaci

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1.9}$$

Z powyższych zależności wynika, że ***macierz naprężeń*** jest ***symetryczna***. Symetria ta pozwala na zredukowanie liczby niezależnych składowych macierzy naprężeń z dziewięciu do sześciu.

Aby wyznaczyć stan naprężenia w dowolnym punkcie rozważanej bryły, czyli postać funkcji $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ określającej wektor naprężenia na dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez dany punkt, wytnijmy z niej myślowo nieskończenie mały czworościan, którego trzy ściany są równoległe do płaszczyzn układu odniesienia, czwarta zaś przecina trzy pozostałe (rys. 1.5). Zakładamy, że znamy macierz naprężeń w tym punkcie.



Rys. 1.5.

Z warunków równowagi sił działających na rozważany czworościan wynika równanie

$$\boldsymbol{p}dA = \boldsymbol{p}_1 dA_1 + \boldsymbol{p}_2 dA_2 + \boldsymbol{p}_3 dA_3 = \boldsymbol{p}_i dA_i \tag{1.10}$$

z którego otrzymujemy następującą zależność:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_i \frac{dA_i}{dA} \tag{1.11}$$

Ponieważ powierzchnia dA_1 jest rzutem powierzchni dA na płaszczyznę prostopadłą do osi Ox_i (rys. 1.5), to

$$\frac{dA_i}{dA} = \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.12}$$

Podstawiając powyższy związek do zależności (1.11), wykorzystując relację (1.5), a także możliwość zamiany wskaźników powtarzających się (patrz podrozdz. C.2) oraz symetrię (1.9), dostajemy

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ij} \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_{ij} \boldsymbol{i}_i \boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.13}$$

Z powyższej zależności wynika, że stan naprężenia w punkcie określa następująca relacja: